



**Zadania na XXI Podkarpacki Konkurs Matematyczny  
im. Franciszka Lejki  
Poziom II**

(klasy drugie liceum i technikum)

Finał

9 kwietnia 2022 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Wiedząc, że  $a - \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ , oblicz wartość wyrażenia  $a^5 - \frac{1}{a^5}$ .
2. Udowodnij, że jeżeli liczby  $a, b, c$  są liczbami całkowitymi i liczba  $a^3 + b^3 + c^3$  jest podzielna przez 6, to liczba  $a + b + c$  jest również podzielna przez 6.
3. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości  $a$  i  $b$  oraz o promieniu okręgu wpisanego w ten trójkąt długości  $r$ . Udowodnij, że zachodzi nierówność:

$$\frac{(a+b)(2-\sqrt{2})}{4} \geq r.$$

4. Wyznacz liczby pierwsze  $a, b, c$  spełniające równanie:

$$a^b + 1 = c.$$

5. W trójkącie  $ABC$  punkt  $E$  jest środkiem środkowej  $AD$ , zaś punkt  $F$  punktem przecięcia prostej  $BE$  z bokiem  $AC$ . Oblicz pole czworokąta  $FEDC$  wiedząc, że pole trójkąta  $ABC$  wynosi  $P$ .

Powodzenia!